15.11.23

Математика (конспект)

§ 2 Перпендикуляр и наклонные. Угол между прямой и плоскостью

19 Расстояние от точки до плоскости

Рассмотрим плоскость α и точку A, не лежащую в этой плоскости. Проведем через точку A прямую, перпендикулярную к плоскости α, и обозначим буквой H точку пересечения этой прямой с плоскостью α (рис. 51). Отрезок AH называется **перпендикуляром, проведенным из точки A к плоскости α**, а точка H — **основанием перпендикуляра**. Отметим в плоскости α какую-нибудь точку M, отличную от H, и проведем отрезок AM. Он называется **наклонной, проведенной из точки A к плоскости α**, а точка M — **основанием наклонной**. Отрезок HM называется **про-**

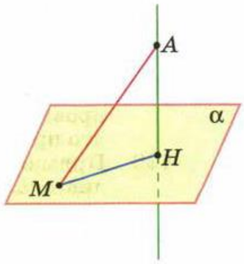

Рис. 51

екцией наклонной на плоскость α. Сравним перпендикуляр AH и наклонную AM: в прямоугольном треугольнике AMH сторона AH — катет, а сторона AM — гипотенуза, поэтому $AH < AM$. Итак, **перпендикуляр, проведенный из данной точки к плоскости, меньше любой наклонной, проведенной из той же точки к этой плоскости.**

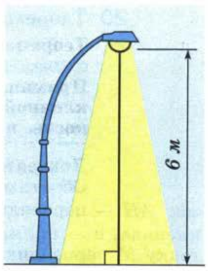

Рис. 52

Следовательно, из всех расстояний от точки A до различных точек плоскости α наименьшим является расстояние до точки H. Это расстояние, т. е. длина перпендикуляра, проведенного из точки A к плоскости α, называется **расстоянием от точки A до плоскости α**. Когда мы говорим, что некоторый предмет, например лампочка уличного фонаря, находится на такой-то высоте, скажем 6 м от земли, то имеем в виду, что расстояние от лампочки до поверхности земли измеряется по перпендикуляру, проведенному от лампочки к плоскости земли (рис. 52).

Замечания

1. Если две плоскости параллельны, то все точки одной плоскости равноудалены от другой плоскости. В самом деле, рассмотрим перпендикуляры AA_0 и MM_0, проведенные из двух произвольных точек A и M плоскости α к параллельной ей плоскости β. Так как $AA_0 \perp \beta$ и $MM_0 \perp \beta$, то $AA_0 \parallel MM_0$. Отсюда следует, что $MM_0 = AA_0$ (свойство 2^0, п. 11), т. е. расстояние от любой точки M плоскости α до плоскости β равно длине отрезка AA_0. Очевидно, все точки плоскости β находятся на таком же расстоянии от плоскости α.

Расстояние от произвольной точки одной из параллельных плоскостей до другой плоскости называется **расстоянием между параллельными плоскостями.**

Как уже отмечалось, примером параллельных плоскостей служат плоскости пола и потолка комнаты. Все точки потолка находятся на одинаковом расстоянии от пола. Это расстояние и есть высота комнаты.

2. Если прямая параллельна плоскости, то все точки прямой равноудалены от этой плоскости (задача 144). В этом случае расстояние от произвольной точки прямой до плоскости называется **расстоянием между прямой и параллельной ей плоскостью.**

3. Если две прямые скрещивающиеся, то, как было доказано в п. 7, через каждую из них проходит плоскость, параллельная другой прямой, и притом только одна. Расстояние между одной из скрещивающихся прямых и плоскостью, проходящей через другую прямую параллельно первой, называется **расстоянием между скрещивающимися прямыми.**

20 Теорема о трех перпендикулярах

Теорема

Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ее проекции на эту плоскость, перпендикулярна и к самой наклонной.

Доказательство

Обратимся к рисунку 53, на котором отрезок AH — перпендикуляр к плоскости α, AM — наклонная, a — прямая, проведенная в плоскости α через точку M перпендикулярно к проекции HM наклонной. Докажем, что $a \perp AM$.

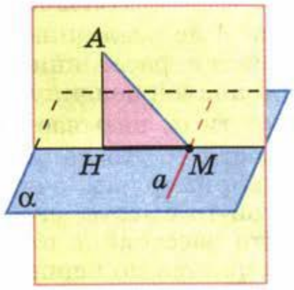

Рис. 53

Рассмотрим плоскость AMH. Прямая a перпендикулярна к этой плоскости, так как она перпендикулярна к двум пересекающимся прямым AH и MH, лежащим в плоскости AMH ($a \perp HM$ по условию и $a \perp AH$, так как $AH \perp \alpha$). Отсюда следует, что прямая a перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости AMH, в частности $a \perp AM$. Теорема доказана.

Эта теорема называется **теоремой о трех перпендикулярах**, так как в ней говорится о связи между тремя перпендикулярами AH, HM и AM.

Справедлива также **обратная теорема: прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ней, перпендикулярна и к ее проекции.** По аналогии с доказательством прямой теоремы, используя рисунок 53, докажите эту теорему самостоятельно (задача 153).

21 Угол между прямой и плоскостью

В п. 19 было дано определение проекции наклонной на плоскость. Введем теперь понятие проекции* произвольной фигуры. **Проекцией точки на плоскость** называется основание перпендикуляра, проведенного из этой точки к плоскости, если точка не лежит в плоскости, и сама точка, если она лежит в плоскости. На рисунке 54 точка M_1 — проекция точки M на плоскость α, а N — проекция самой точки N на ту же плоскость ($N \in \alpha$).

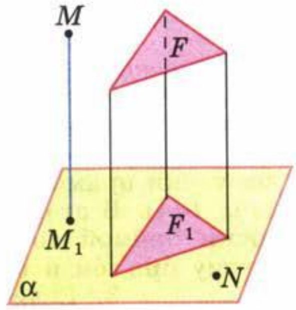

Рис. 54

Обозначим буквой F какую-нибудь фигуру в пространстве. Если мы построим проекции всех то-

* В данном пункте речь идет о **прямоугольной** (или ортогональной) проекции фигуры. Более общее понятие параллельной проекции фигуры рассматривается в приложении 1.

чек этой фигуры на данную плоскость, то получим фигуру F_1, которая называется **проекцией фигуры F на данную плоскость.** На рисунке 54 треугольник F_1 — проекция треугольника F на плоскость α.

Докажем теперь, что **проекцией прямой на плоскость, не перпендикулярную к этой прямой, является прямая.**

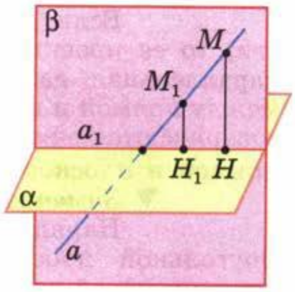

Рис. 55

Данную плоскость обозначим буквой α, а произвольную прямую, не перпендикулярную к плоскости α, — буквой a (рис. 55). Из какой-нибудь точки M прямой a проведем перпендикуляр MH к плоскости α и рассмотрим плоскость β, проходящую через a и MH. Плоскости α и β пересекаются по некоторой прямой a_1. Докажем, что эта прямая и является проекцией прямой a на плоскость α. В самом деле, возьмем произвольную точку M_1 прямой a и проведем в плоскости β прямую M_1H_1, параллельную прямой MH (H_1 — точка пересечения прямых M_1H_1 и a_1). По первой теореме п. 16 $M_1H_1 \perp \alpha$, и, значит, точка H_1 является проекцией точки M_1 на плоскость α. Мы доказали, что проекция произвольной точки прямой a лежит на прямой a_1. Аналогично доказывается, что любая точка прямой a_1 является проекцией некоторой точки прямой a. Следовательно, a_1 — проекция прямой a на плоскость α.

Из доказанного утверждения следует, что проекцией отрезка AB, не перпендикулярного к плоскости, является отрезок, концами которого служат проекции точек A и B. Поэтому определение проекции наклонной (п. 19) полностью согласуется с общим определением проекции фигуры. Используя понятие проекции прямой на плоскость, дадим определение угла между прямой и плоскостью.

Определение

Углом между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и не перпендикулярной к ней, называется угол между прямой и ее проекцией на плоскость.

Можно доказать, что угол φ_0 между данной прямой AM и плоскостью α (рис. 56) является наименьшим из всех углов φ, которые данная прямая образует с прямыми, проведенными в плоскости α через точку A (задача 162).

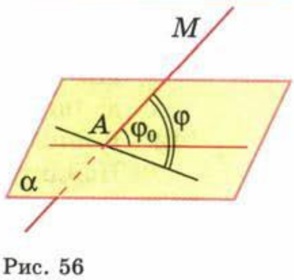

Рис. 56

Если прямая перпендикулярна к плоскости, то ее проекцией на эту плоскость является точка пересечения этой прямой с плоскостью. В таком случае угол между прямой и плоскостью считается равным 90°.

Если данная прямая параллельна плоскости, то ее проекцией на плоскость является прямая, параллельная данной. В этом случае понятие угла между прямой и плоскостью мы не вводим. (Иногда договариваются считать, что угол между параллельными прямой и плоскостью равен 0°.)

▼ **Замечание**

Наряду с рассмотренной в этом пункте прямоугольной проекцией и параллельной проекцией, речь о которой пойдет в приложении 1, иногда используется центральная проекция. Она определяется так. Рассмотрим произвольную плоскость α и какую-нибудь точку O, не лежащую в этой плоскости. Пусть β — плоскость, проходящая через точку O и параллельная плоскости α. **Центральной проекцией** (с центром O) **точки** M, не лежащей в плоскости β, **на плоскость** α называется точка M_1 пересечения прямой OM с плоскостью α. **Центральной проекцией фигуры на плоскость** α называется множество центральных проекций на плоскость α всех точек этой фигуры, не лежащих в плоскости β. Примером центральной проекции фигуры является ее фотографический снимок. △

Задачи

138 Из некоторой точки проведены к данной плоскости перпендикуляр и наклонная, угол между которыми равен φ. а) Найдите наклонную и ее проекцию на данную плоскость, если перпендикуляр равен d. б) Найдите перпендикуляр и проекцию наклонной, если наклонная равна m.

139 Из некоторой точки проведены к плоскости две наклонные. Докажите, что: а) если наклонные равны, то равны и их проекции; б) если проекции наклонных равны, то равны и наклонные; в) если наклонные не равны, то бо́льшая наклонная имеет бо́льшую проекцию.

140 Из точки A, не принадлежащей плоскости α, проведены к этой плоскости перпендикуляр AO и две равные наклонные AB и AC. Известно, что $\angle OAB = \angle BAC = 60°$, $AO = 1{,}5$ см. Найдите расстояние между основаниями наклонных.

141 Один конец данного отрезка лежит в плоскости α, а другой находится от нее на расстоянии 6 см. Найдите расстояние от середины данного отрезка до плоскости α.

142 Концы отрезка отстоят от плоскости α на расстояниях 1 см и 4 см. Найдите расстояние от середины отрезка до плоскости α.

143 Расстояние от точки M до каждой из вершин правильного треугольника ABC равно 4 см. Найдите расстояние от точки M до плоскости ABC, если $AB = 6$ см.